ΤΠΕ και Μαθηματικά: Ωφελιμότητα, περιττότητα ή ουτοπία;

Μαστρογιάννης Αλέξιος, *Εκπαιδευτικός ΠΕ70, Μαθηματικός Msc*
Τρύπα Αντιγόνη, *Εκπαιδευτικός ΠΕ06*

Περίληψη: Η παρούσα εργασία αναφέρεται, αρχικά, στην επικράτηση του ηλεκτρονικού υπολογιστή ως καινοτόμου συσκευής γρήγορων υπολογισμών αλλά και ως σημαντικού μέσου διδασκαλίας. Ακολούθως, εξετάζεται η συνεισφορά των ΤΠΕ στη διερεύνηση, διαλεύκανση αλλά και την επίλυση πολλών μαθηματικών προβλημάτων, όπως για παράδειγμα, η εύρεση των ψηφίων του άρρητου αριθμού «π» αλλά και η απόδειξη του διάσημου θεωρήματος των τεσσάρων χρωμάτων. Κατόπιν, εκτίθενται επιχειρήματα περί της ωφελιμότητας των ΤΠΕ στη μαθηματική εκπαίδευση, ως ισχυρών και αποτελεσματικών γνωστικών εργαλείων. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η νέα γενιά του γεωμετρικού λογισμικού, των Περιβαλλόντων Δυναμικής γεωμετρίας, η οποία ριζοσπαστικοποίησε τη διδασκαλία και μάθηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Τέλος, και για μάρτυρες υπεράσπισης των ΤΠΕ, ως «ενισχυτικών μάθησης», προτείνονται τρόποι αξιοποίησης του Cabri Geometry στη μαθησιακή διαδικασία και ιδιαίτερα κατά την εφαρμογή της θεωρίας των πέντε, μη ηλικιακά συναρτημένων, επιπέδων σκέψης των van Hiele. Η θεωρία αυτή αποτελεί τον παράγοντα με τη μεγαλύτερη επίδραση στη σχολική γεωμετρία, τα τελευταία χρόνια.

1. Ο ηλεκτρονικός υπολογιστής

Οι πέντε κεφαλαιώδεις ανακαλύψεις, που συνέβαλαν καταλυτικά και καίρια στη γρήγορη και αποτελεσματική εκτέλεση υπολογισμών και αποτέλεσαν όλες ανεξαιρέτως, μεγάλες στιγμές των μαθηματικών αλλά και μεγαλειώδεις σταθμοί σε κάθε, σχεδόν, πτυχή της ανθρώπινης εξέλιξης, είναι, κατά σειρά εμφάνισης, οι παρακάτω (Eves, 1989): ο άβακας, το ινδοαραβικό σύστημα, τα δεκαδικά κλάσματα, οι λογάριθμοι και ο σύγχρονος υπολογιστής.

Σύμφωνα με έναν ορισμό (που συμμαχεί, ασφαλώς, με την αλήθεια) οι υπολογιστές εφευρέθηκαν για να λύνουν πολύπλοκα μαθηματικά προβλήματα και εξισώσεις. Μάλιστα, η λέξη Υπολογιστής δήλωνε αρχικά, το λύτη εξισώσεων και μόνο μετά το 1945, ταυτίστηκε με το συγκεκριμένο μηχάνημα (Cerussi, 2006).

Οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές καταχωρίσθηκαν ως μέσα διδασκαλίας, ήδη, από τη δεκαετία του 1950.

Στα πολλά πλεονεκτήματα, που κοσμούν και ισχυροποιούν την εκπαιδευτική φαρέτρα του Η/Υ, εν είδει «μαθησιακών βελών», αναμφίβολα, συγκαταλέγονται το δυναμικό περιβάλλον διεπαφής, η αλληλεπιδραστικότητα, η φιλικότητα, η ευχρηστία, η ταχύτητα, τα πλούσια γραφικά, οι δυνατότητες πλοήγησης στο κυβερνοχώρο αλλά και συγχρονικής και ασύγχρονης επικοινωνίας, η αυτόματη λήψη και αποστολή αρχείων, η μετάλλαξή του σε μέσο, που αντικατέστησε παραδοσιακές συσκευές ήχου, εικόνας και διασκέδασης και φυσικά…ο κατάλογος συνεχίζεται, όπως και θα εμπλουτίζεται καθημερινά με νέες (ίσως και εξωπραγματικές) δυνατότητες.

Οι πρώτοι λειτουργικοί υπολογιστές που τέθηκαν σε χρήση ήταν ο MARK 1 το 1944 στο Χάρβαρντ και ο ENIAC το 1946, στο πανεπιστήμιο της Πενσυλβάνια. Η χρήση των υπολογιστών ευδοκίμησε, αρχικά, σε πρόσφορο …υπερμέγεθες «μαθηματικό» και «μηχανικό» έδαφος, σαν εργαλείο επίλυσης προβλημάτων. Ήταν δε περιορισμένη, κυρίως, στην ανάγνωση και πληκτρολόγηση κειμένων (Alessi & Trollip, 2005).

Το 1959, στο πανεπιστήμιο του Ιλλινόις, ο Donald Bitier επινόησε το PLATO (Programmed Logic for Automatic Teaching Operations), το πρώτο, μεγάλης κλίμακας πρόγραμμα για τη χρήση των υπολογιστών στην εκπαίδευση. Το έργο αυτό παρείχε γραφικά και πρώιμα περιβάλλοντα προγραμματισμού για την εκπαίδευση, με τη βοήθεια υπολογιστών. Αργότερα, παρουσιάζονται και οι γλώσσες FORTRAN και BASIC, με τη δεύτερη να διαδίδεται αμέσως και να καλύπτει πολλά γνωστικά αντικείμενα αλλά και όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης (Molnar, 1997· Alessi & Trollip, 2005).

Στο τέλος της δεκαετίας του 70, λόγω και του παιδαγωγικού, εκπαιδευτικού και διδακτικού ενδιαφέροντος, για εξατομικευμένη διδασκαλία, παρουσιάστηκαν οι μικροϋπολογιστές, που μετασχημάτισαν άρδην και ολοκληρωτικά το πεδίο της εκπαιδευτικής τεχνολογίας. Ο Μικροϋπολογιστής Apple II και αυτός της IBM, αμέσως μετά το 1981, αποτέλεσαν την αιχμή του τεχνολογικού δόρατος, που άλωσε και εκπόρθησε το εκπαιδευτικό, παραδοσιακό και συμβατικό φρούριο. Οι πρώτοι προσωπικοί υπολογιστές, αύξησαν δραματικά την παραγωγή τους και τους κατόχους τους, μετά και το λανσάρισμα των Windows το 1995. Ενδιάμεσα, το 1991, είχε δημιουργηθεί ο Παγκόσμιος Ιστός από τον Άγγλο Tim Berners-Lee. Ενδεικτικό της καταιγιστικής διείσδυσης των υπολογιστών είναι η αύξηση του ποσοστού χρήσης τους στα σχολεία της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Αμερική, από το 1% στο 75%, μέσα στην εικοσαετία 1963-1983.

Την εποχή εκείνη υπήρχε ένα αυξανόμενο αίσθημα ευφροσύνης, ανάμεσα σε μαθητές και ειδικά για τα μαθηματικά, αφού θεωρούνταν ότι κάθε μαθηματικό πρόβλημα θα επιλυόταν με τη βοήθεια των υπολογιστών και όλη η μαθηματική δραστηριότητα θα ήταν προσανατολισμένη σε αυτούς. Αυτή η εσφαλμένη μαθητική παραδοχή και προσδοκία ονομάσθηκε, χλευαστικά, «κομπιουτερίτιδα». Βέβαια, οι υπολογιστές μπορούν να θεωρηθούν μαθηματικά εργαλεία και πολύτιμοι μαθηματικοί διευκολυντές, μόνο κατά την επεξεργασία μεγάλου πλήθους συμβόλων, σε εκτενείς υπολογισμούς και σε μεγάλης κλίμακας απαρίθμηση και έλεγχο προτύπων και περιπτώσεων (Eves, 1990).

Γι' αυτούς τους λόγους ο Υπολογιστής υπερτερεί του ανθρώπου. Με μηδενική πιθανότητα λάθους κάνει υπολογισμούς, που ο ανθρώπινος εγκέφαλος θα απαιτούσε χρόνο μεγαλύτερο της συμπαντικής ηλικίας, για να τους εκτελέσει. Προς το παρόν, ο Υπολογιστής ηττάται και υποσκελίζεται, τουλάχιστον, σε 2 περιπτώσεις από έναν βιολογικό ον: Στην… αδυναμία αναπαραγωγής του και στη μηχανική περιχαράκωση της διάνοιάς του (Περσίδης, 1978).

2. Μαθηματικά προβλήματα και Υπολογιστής

Πάντως, μερικά, ίσως και σοβαρά μαθηματικά προβλήματα, βρήκαν λυσιτελές απάγκιο και αναζωογονητική θαλπωρή στα θερμά κυκλώματα και στους υπήνεμους διαδρόμους και καταχωρητές των επεξεργαστών των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών.

Για παράδειγμα, τα τελευταία χρόνια το θέμα εύρεσης των δεκαδικών ψηφίων του π έχει πάρει διαστάσεις πρωταθλητισμού και έχουν ανακαλυφθεί, με τη βοήθεια των Η/Υ, ήδη, από το 2001, πάνω από 50 δισεκατομμύρια ψηφία (Μπλάτνερ, 2001). Εξάλλου, καταλυτική και καίρια είναι και η συνεισφορά των Η/Υ στην εύρεση των λεγόμενων τέλειων ή και φίλιων αριθμών.

Η φιλία στα χρόνια των Πυθαγορείων είχε εξυψωθεί σε πολύ μεγάλο βαθμό, ώστε οι ακάματοι αυτοί αριθμολόγοι ενδιαφέρθηκαν και για ζευγάρια αριθμών, που τους ονόμασαν φίλους, όπου ο ένας είναι το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του άλλου. Ένα ζεύγος τέτοιων αριθμών, που ανακάλυψαν οι Πυθαγόρειοι, είναι οι 284 και 220, δεδομένου ότι Δ_{220} = (1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, 220) και το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών, ισούται με 284, ενώ Δ_{284} = (1, 2, 4, 71, 142, 284) και 1+2+4+71+142=220. Σήμερα, εξαιτίας της βοήθειας των υπολογιστών είναι γνωστά χιλιάδες ζεύγη φίλιων αριθμών.

Οι Πυθαγόρειοι, αφού αντιστοίχιζαν τους τέλειους αριθμούς στους τέλειους ανθρώπους και τους φίλους στη φιλία, κατέληγαν στο συμπέρασμα ότι όπως σπανίζουν οι τέλειοι και οι φίλοι αριθμοί, έτσι σπανίζουν οι τέλειοι άνθρωποι και η φιλία μεταξύ των ανθρώπων.

Τέλειος λέγεται ένας αριθμός, όταν είναι ίσος με το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του. Ο αριθμός 6, για παράδειγμα είναι τέλειος γιατί οι διαιρέτες του, εκτός του 6 φυσικά, είναι οι 1, 2, 3 και 1+2+3=6. Το ίδιο συμβαίνει με τον 28, αφού ισχύει Δ_{28}= (1, 2, 4, 7, 14, 28) και 1+2+4+7+14=28, δηλαδή ο 28 είναι ο επόμενος τέλειος αριθμός. Οι επόμενοι 3 τέλειοι αριθμοί εμφανίζονται παρακάτω:

$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 2^4 (2^5-1)$

$8.128 = 1 + 2 + 4 + ... + 64 + 127 + ... + 4064 = 2^6 (2^7-1)$

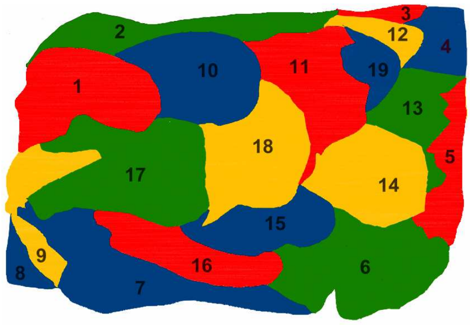
$33.550.336 = 1 + ... + 4096 + 8191 + ... + 16775168 = 2^{12} (2^{13}-1)$

Ο Ευκλείδης είχε δείξει στο Ένατο Βιβλίο των Στοιχείων του, ότι αν ο αριθμός $2^{\nu-1}$ είναι πρώτος τότε ο $2^{\nu-1}$ $(2^{\nu}-1)$ είναι τέλειος. Σήμερα, κάθε πρώτος αριθμός της μορφής $2^{\nu-1}$, καλείται πρώτος του Mersenne. Ο Euler συμπλήρωσε την απόδειξη, αποδεικνύοντας ότι ο a είναι ένας άρτιος τέλειος αριθμός, αν και μόνο αν, έχει τη μορφή $a= 2^{\nu-1} (2^{\nu}-1)$. Περιττός τέλειος, μέχρι στιγμής, δεν έχει βρεθεί.

Μέχρι σήμερα (Μάιος του 2010), είναι γνωστοί 47 πρώτοι αριθμοί του Mersenne και συνεπακόλουθα 47 τέλειοι αριθμοί! Στις 23 Αυγούστου 2008, από έναν υπολογιστή στο University of California, Los Angeles στον οποίο εγκαταστάθηκε το ελεύθερο λογισμικό-μηχανή GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search) ανακαλύφθηκε ο $2^{43.112.609}-1$, ο 45ος πρώτος του Mersenne, ένας αριθμός 12.978.189 ψηφίων! Ακριβώς 2 βδομάδες αργότερα, στις 6 Σεπτεμβρίου ο 46ος πρώτος του Mersenne, ήταν γεγονός. Ανακαλύφθηκε από τον Hans-Michael Elvenich στο Langenfeld, κοντά στην Κολονία, στη Γερμανία. Είναι ο $23^{7.156.667}- 1$, με 11.185.272 ψηφία. Στις 12 Απριλίου του 2009, ο $2^{42.643.801}-1$, ο 47ος πρώτος του Mersenne των 12.837.064 ψηφίων (ο δεύτερος γνωστός μεγαλύτερος), είχε παραδώσει, ήδη, τα διαπιστευτήριά του.

Οι ανακαλύψεις του 45ου και 46ου φιγουράριζαν στην 29η θέση των «50 καλύτερων εφευρέσεων του 2008», του περιοδικού TIME. Μάλιστα, στη μηχανή «GIMPS» απονεμήθηκε βραβείο $100.000 από το Electronic Frontier Foundation, εξαιτίας της ανακάλυψης πρώτου αριθμού του Mersenne, με περισσότερα από 10 εκατομμύρια ψηφία (πηγή: www.mersenne.org).

Φυσικά, από οποιαδήποτε ιστορική αναδρομή δεν θα ήταν απών ο επιστημονικός, μαθηματικός άθλος με τα τεχνολογικά του δεκανίκια, η απόδειξη δηλαδή, του «θεωρήματος των τεσσάρων χρωμάτων».



Εικόνα 1. Θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων

Αυτό το διάσημο θεώρημα έχει μια ιστορία 156 χρόνων. Διατυπώθηκε από τον Άγγλο Francis Guthrie, το 1852, όταν παρατήρησε ότι τέσσερα χρώματα είναι αρκετά για να επισημανθούν οι νομοί, σε ένα χάρτη της Αγγλίας. Γενικότερα, το θεώρημα δηλώνει ότι οποιοδήποτε επίπεδο που χωρίζεται σε περιοχές (όπως ένας πολιτικός χάρτης) μπορεί να χρωματισθεί, χρησιμοποιώντας το πολύ τέσσερα διαφορετικά χρώματα.

Μολονότι το θεώρημα είναι αρκετά δύσκολο να αποδειχθεί, εντούτοις το πρόβλημα του χρωματισμού χαρτών είναι εύκολο να κατανοηθεί και να εξηγηθεί.

Μεγάλοι μαθηματικοί εργάσθηκαν σκληρά και επί ματαίω, για την απόδειξη αυτού του απλού και απλοϊκού, φαινομενικά, προβλήματος. Μια λανθασμένη απόδειξη δημοσιεύτηκε το 1879 από τον Alfred Kempe και το πρόβλημα θεωρούνταν λυμένο, για μια δεκαετία, ωσότου το λάθος εντοπισθεί. Μετά την κατάρρευση της απόδειξης του Kempe, πολλοί μαθηματικοί, ερασιτέχνες και επαγγελματίες, προσπάθησαν να λύσουν αυτό το ιντριγκαδόρικο θεώρημα, αποκαλούμενο ως «Υπόθεση των 4 χρωμάτων» (Lovász & Pelikán & Vesztergombi, 2003).

Αρκετές εσφαλμένες αποδείξεις κατατέθηκαν χωρίς φυσικά, έγκυρο επιστημονικά, αντίκρισμα, γεγονός που παραπέμπει, ευθέως, στο «Τελευταίο θεώρημα του Φερμά», το θεώρημα που ταλαιπώρησε, για 350 περίπου χρόνια, γενιές μαθηματικών που καταπιάστηκαν με την επίλυσή του και συγκεντρώνει, μέχρι στιγμής, τις περισσότερες, λανθασμένες απόπειρες απόδειξής του.

Κάτι ανάλογο (μα μικρότερης κλίμακας) σημειώθηκε και με τις άστοχες και ανεπιτυχείς προσπάθειες επίλυσης της Υπόθεσης των 4 χρωμάτων, αφού αποτέλεσαν αυτές τη θρυαλλίδα για την ανάπτυξη ενός ολοκληρωτικά νέου τομέα των Μαθηματικών, της θεωρίας γραφημάτων.

Ώσπου το 1976, ο Kenneth Appel and Wolfgang Haken παρουσίασαν μια απόδειξη της υπόθεσης τεσσάρων χρώματος την οποία και μετονόμασαν πια, αναγκαστικά, σε «θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων». Το θεώρημα αυτό ήταν το πρώτο που αποδείχθηκε με τη βοήθεια Υπολογιστών. Έτσι, κατέστη εφικτός ο έλεγχος ενός τεράστιου αριθμού δυνητικών περιπτώσεων, οι οποίες περιέχονται σε αρκετές εκατοντάδες σελίδες, με πολύπλοκες λεπτομέρειες, ενώ δαπανήθηκαν τουλάχιστον 1.000 ώρες υπολογισμών σε υπολογιστή. Ανεπιφύλακτα, η λύση του προβλήματος των τεσσάρων χρωμάτων, το καλοκαίρι του 1976, πρέπει να θεωρηθεί ως μια μεγάλη στιγμή των μαθηματικών (Lovász & Pelikán & Vesztergombi, 2003· Eves, 1990).

3. Η Τεχνολογία στα Μαθηματικά

Οι όροι «Πληροφορική» αλλά και οι «Νέες Τεχνολογίες» παραχώρησαν ευγενώς τη θέση τους στον διεθνώς καθιερωμένο όρο «Τεχνολογίες Πληροφορίας και Επικοινωνιών», γνωστό και με το ακρωνύμιο Τ.Π.Ε. Αυτές οι τεχνολογίες, αποκρυσταλλώνοντας όλους τους σχετικούς ορισμούς, περιλαμβάνουν, φυσικά, τους υπολογιστές, το Διαδίκτυο, τις τεχνολογίες αναμετάδοσης και την τηλεφωνία.

Ο υπολογιστής, ως επ-(προ)-έκταση του ανθρώπινου νου και επειδή υποστηρίζει γνωστικές διεργασίες και ενισχύει τις γνωστικές δεξιότητες των μαθητών, όπως κριτική σκέψη, επίλυση προβλημάτων, διερεύνηση και αναζήτηση πληροφοριών, δεξιότητες λήψης απόφασης, μεταγνωστικές διεργασίες, αυτορύθμιση και αναστοχασμό, ευνοήτως και δικαιωματικά, θεωρείται σπουδαίο γνωστικό (νοητικό) εργαλείο (cognitive or mind tool).

Υπό αυτήν την «γνωστική ιδιότητα» ο υπολογιστής και γενικά οι ΤΠΕ έχουν επιφέρει ευεργετικά αποτελέσματα και θε(αμα)τικές επιπτώσεις στη σχολική πρακτική και διαδικασία, όπως αποδεικνύουν περίτρανα και αφοπλιστικά τα κοινότοπα ευρήματα πολλών ερευνών, τις τελευταίες 2 και πλέον δεκαετίες. Αν και, βέβαια, εγείρονται και ενστάσεις, ως προς την ωφελιμότητα και προστιθέμενη αξία των ΤΠΕ στη μαθησιακή διαδικασία, σε κάθε περίπτωση όμως, ο κύριος πυλώνας τεχνολογικής, εκπαιδευτικής αξιοποίησης αποτυπώνεται περίτρανα στη δηκτική δήλωση του Noss, συνεργάτη του Piaget: «Τα χρηματικά ποσά που διατίθενται για την παιδαγωγική κατάρτιση και επιμόρφωση των εκπαιδευτικών, επιβάλλεται να είναι εκατονταπλάσια αυτών που δαπανώνται για την αγορά υπολογιστών».

Οι εκπαιδευτικές χρήσεις των ΤΠΕ χωρίζονται, αδρομερώς, σε 3 κατηγορίες (Βοσνιάδου, 2006). Η πρώτη κατηγορία αφορά στην ανάπτυξη βασικών δεξιοτήτων και στην εξοικείωση με την Τεχνολογία. Επίσης, οι μαθητές μαθαίνουν να χρησιμοποιούν λογισμικά. Η δεύτερη περίπτωση επικεντρώνεται σε λογισμικά εξάσκησης και επανάληψης. Τέλος η τελευταία κατηγορία χρήσεων των ΤΠΕ περιλαμβάνει περισσότερο κονστρουκτιβιστικές προσεγγίσεις.

Σύμφωνα με το NCTM (2000), η τεχνολογία είναι ουσιαστική για τη μάθηση των Μαθηματικών, διότι επιδρά δραστικά στα Μαθηματικά που διδάσκονται στο σχολείο, ενισχύοντας τη διαδικασία της μάθησης. Τα τεχνολογικά εργαλεία μπορούν να υποστηρίξουν την έρευνα και την ανακάλυψη της γνώσης από τους μαθητές, σε κάθε τομέα των Μαθηματικών. Οι μαθητές μπορούν να μάθουν περισσότερα Μαθηματικά με τη χρήση της τεχνολογίας, η οποία όταν αξιοποιείται κατάλληλα και επαρκώς, μπορεί να παρέχει ένα πλούσιο περιβάλλον στο οποίο μπορούν να αναπτυχθούν η κατανόηση της Γεωμετρίας αλλά και η διαίσθηση των μαθητών. Ο Noss και Hoyles περιγράφουν τον υπολογιστή ως ένα παράθυρο μάθησης. Οι ΤΠΕ πρέπει να χρησιμοποιούνται στις αίθουσες, ώστε να βοηθούν τους μαθητές κατά την επίλυση προβλημάτων, προσφέροντας πρόσβαση σε πληροφορίες, αποτελώντας ιδανικό πεδίο για μοντελοποίηση προβλημάτων αλλά και γόνιμο έδαφος ανάπτυξης μοντέλων και διαδικασιών λήψης αποφάσεων (Jonassen & Howland, 2003).

4. Αξιοποίηση των Δυναμικών Περιβαλλόντων στη Μαθηματική εκπαίδευση

Πρόδηλα μπορούν να χαρακτηριστούν τα δυο κύρια συστατικά στοιχεία του ηλεκτρονικού υπολογιστή και έτσι, αβίαστα, είναι δυνατό, να αποκαλυφθεί η δισυπόστατη φύση του. Το υλικό (hardware) και το λογισμικό (software) αποτελούν το ζωογόνο ζεύγος τής «εικονικής ύπαρξής του».

Φυσικά, υπάρχουν πολλοί διαθέσιμοι τύποι λογισμικών για τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών. Προς τα τέλη της δεκαετίας του ΄80, τοποθετείται η νέα γενιά του γεωμετρικού λογισμικού, δηλαδή, των Περιβαλλόντων Δυναμικής Γεωμετρίας με δημοφιλέστερους αντιπροσώπους το Cabri και το Sketchpad, που ριζοσπαστικοποίησαν τη διδασκαλία και μάθηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Τα πρώτα Δυναμικά Περιβάλλοντα Γεωμετρίας αξιοποίησαν πλήρως, την τεράστια πρόοδο που είχε συντελεστεί στη δημιουργία γραφικών διεπαφών χρήστη. Ένα από τα κίνητρα ήταν να ενισχυθούν οι μαθητές, ώστε να αντιληφθούν τις γενικές πτυχές ενός στατικού διαγράμματος (Laborde et all, 2006). Επιπλέον ήταν (και είναι) περισσότερο φιλικά στο χρήστη και φυσικά δεν απαιτούν γνώσεις προγραμματισμού, κάτι που προβάλλει, μάλλον, ως το σημαντικότερο πλεονέκτημά τους.

Τα μαθηματικά είναι μια από τις γλώσσες της φαντασίας και η γεωμετρία είναι μια δεξιότητα των ματιών, των χεριών καθώς επίσης και του νου. Οι λέξεις «θεώρημα» και «θέατρο» είναι ομόριζες και σχετίζονται με τις παρουσιάσεις, με τις επιδείξεις, ενώ και οι δύο παρέχουν μια αύρα μαγείας γύρω τους (Johnston- Wilder & Pimm, 2005).

Τα λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας προσφέρουν αυτή την αίσθηση της μαγείας, με τη δημιουργία και το συνεχή μετασχηματισμό διαγραμμάτων και άλλων μαθηματικών μορφών. Αντίθετα από την ανθρώπινη νοητική φαντασία, η οθόνη του υπολογιστή μπορεί επίσης να κρατήσει συγκεκριμένες εικόνες για παρατήρηση και διερεύνηση και, επιπλέον, είναι ένας δημόσιος χώρος, που καθιστά τις δυναμικές φαντασίες, ορατές σε όλους (Johnston- Wilder & Pimm, 2005).

Η Γεωμετρία, αναμφίβολα, είναι το γνωστικό αντικείμενο στο οποίο η τεχνολογία έχει υπεισέλθει «δυναμικά», μέσω, αυτών των γνωστών διαδραστικών περιβαλλόντων μάθησης. Ακόμα, τέτοιες τεχνολογικές προσεγγίσεις είναι δυνατές ακόμα και στην ύλη του Δημοτικού Σχολείου. Το σωστό εκπαιδευτικό λογισμικό έχει υψηλή ανατροφοδοτική και αλληλεπιδραστική λειτουργία, αφού σχεδιάζεται και υλοποιείται, αυστηρά, για καθαρά διδακτικούς σκοπούς.

Τα λογισμικά αυτά ανήκουν στην κατηγορία των διερευνητικών μικρόκοσμων, αποτελούν εικονικά εργαστήρια και επιτρέπουν στους μαθητές να δημιουργήσουν πληθώρα ομοειδών σχημάτων, να πειραματισθούν, να εξερευνήσουν και να παρατηρήσουν, προκειμένου να εντοπίσουν σταθερές, πρότυπα και κανονικότητες, ώστε να διατυπώσουν υποθέσεις τις οποίες και θα δοκιμάσουν ακολούθως, με τη συνδρομή του λογισμικού. Σε ένα τέτοιο είδος αλληλεπίδρασης με το μικρόκοσμο ο μαθητής μπορεί να αποκτήσει τη γνώση που ενσωματώνεται στο λογισμικό και μπορεί έπειτα να κατασκευάσει μια κατάλληλη γεωμετρική γνώση (Bartolini Bussi et all).

Γενικά, πολλά αποτελέσματα ερευνών αποκαλύπτουν ότι τα δυναμικά περιβάλλοντα διευκολύνουν την καλύτερη κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών και ενθαρρύνουν τους μαθητές να κινηθούν προς υψηλότερα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης πέραν μιας στραγγαλιστικής απομνημόνευσης ιδιοτήτων, κάποιων γεωμετρικών σχημάτων (Ustun & Ubuz, 2004).

5. Επίπεδα γεωμετρικής σκέψης van Hiele και δυναμικά περιβάλλοντα

Η σχολική γεωμετρία, που παρουσιάζεται αξιωματικά, υποθέτει ότι οι μαθητές σκέφτονται με ένα τυπικά συμπερασματικό τρόπο. Μια άλλη θεωρία, όμως, σχετικά με την εκμάθηση της γεωμετρίας είναι η θεωρία των van Hiele, δυο Ολλανδών παιδαγωγών, που ξεκίνησε το 1959 και αποτελεί, σήμερα, τον παράγοντα με τη μεγαλύτερη επίδραση στη σχολική γεωμετρία. Αποτελείται από δύο κύριες πτυχές. Η πρώτη αποτελείται από μια ιεραρχική ακολουθία πέντε επιπέδων συλλογιστικών διεργασιών και γεωμετρικής σκέψης. Το δεύτερο μέρος ενδιαφέρεται για την ανάπτυξη της διαίσθησης των μαθητών και επικεντρώνεται στις φάσεις εκμάθησης, στα μέσα, δηλαδή, τα οποία μετέρχεται ένας δάσκαλος, προκειμένου να αυξήσει την απόδοση των μαθητών του, μέσω αυτών των διάφορων επιπέδων σκέψης. Τα επίπεδα έχουν μια συγκεκριμένη και αυστηρή αλληλουχία και καθώς το παιδί προχωράει γραμμικά, από ένα προηγούμενο επίπεδο στο επόμενο, το αντικείμενο των γεωμετρικών του συλλογισμών αλλάζει (Olkun & Sinoplu & Deryakulu, 2005· Van de Walle, 2005)

Τα πέντε επίπεδα γεωμετρικής σκέψης των van Hiele, τα οποία, κατά βάση, δεν είναι ηλικιακά συναρτημένα, είναι τα εξής (συνοδευόμενα από τα κυριότερα χαρακτηριστικά τους):

- Επίπεδο 1: Νοερή Απεικόνιση (Visualisation). Οι μαθητές αναγνωρίζουν τα σχήματα ως συνολικές οντότητες και παραβλέπουν τις ιδιότητες και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους. Ένα περιστρεμμένο ορθογώνιο τρίγωνο, για παράδειγμα, που η βάση του δεν είναι παράλληλη στις γραμμές ή στο περίγραμμα τού τετραδίου, και στην περίπτωσή μας στην κάτω πλευρά της οθόνης, πιθανόν, να μην αναγνωρίζεται ως τέτοιο. Επίσης οι μαθητές μπορούν να προσδιορίσουν ένα σχήμα από την εμφάνιση. Έτσι μπορούν να αναγνωρίζουν ένα εξάγωνο, αλλά να αδυνατούν να διακρίνουν τις ίσες πλευρές του. Το λογισμικό Cabri παρέχει τη δυνατότητα εύκολης δημιουργίας όλων των επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων, υποστηρίζοντας, σθεναρώς, αυτό το πρώτο επίπεδο van Hiele αλλά και το δεύτερο, που ακολουθεί.

- Επίπεδο 2: Ανάλυση (Analysis). Οι μαθητές εντοπίζουν τις ιδιότητες κάποιων σχημάτων, αδυνατώντας, όμως, να τις εξηγήσουν και να τις ορίσουν, και μέσω αυτών προβαίνουν σε χαλαρές ομαδοποιήσεις. Για παράδειγμα, οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν ότι το τραπέζιο έχει τέσσερις γωνίες και τέσσερις πλευρές, με δυο απέναντι πλευρές παράλληλες. Βασικό χαρακτηριστικό των δυναμικών λογισμικών είναι η δυναμική τροποποίηση, η μετακίνηση και ο μετασχηματισμός των σχημάτων, με διατήρηση, όμως, των βασικών σχέσεων και ιδιοτήτων τους. Είναι σαν τα σχήματα να αντιδρούν στους χειρισμούς του χρήστη, ακολουθώντας τους νόμους της Γεωμετρίας, ακριβώς όπως τα υλικά αντικείμενα αντιδρούν, σύμφωνα με τους νόμους της Φυσικής (Laborde et all, 2006).
- Επίπεδο 3: Μη Τυπική Παραγωγή (Informal Deduction). Σε αυτό το επίπεδο οι μαθητές μπορούν να επιχειρηματολογήσουν, μέσω μιας ενορατικής κατανόησης των ιδιοτήτων των σχημάτων αλλά και κάποιων συσχετισμών μεταξύ των ιδιοτήτων διαφορετικών σχημάτων. «Ένα τρίγωνο χαρακτηρίζεται σκαληνό αφού διαθέτει τρεις άνισες μεταξύ τους πλευρές» είναι μια απόφανση μαθητή που η σκέψη του κινείται, τουλάχιστο, στο τρίτο επίπεδο της Μη Τυπικής Παραγωγής. Η λειτουργία του συρσίματος (drag mode), παρέχει, άμεσα, τη δυνατότητα δυναμικών μετασχηματισμών και διαμόρφωσης δυναμικών όψεων των γεωμετρικών κατασκευών και σχημάτων, με αποτέλεσμα, μόνο οπτικές διαφοροποιήσεις, αφού οι βασικές τους γεωμετρικές ιδιότητες παραμένουν αναλλοίωτες. Μέσω της απειρίας των σχημάτων, οι μαθητές μπορούν να διατυπώνουν υποθέσεις, όσον αφορά στις κοινές ιδιότητες των σχημάτων, και να οδηγούνται, επαγωγικά, σε γενικεύσεις.
- Επίπεδο 4: Παραγωγή (Deduction). Οι μαθητές, στηριζόμενοι σε ορισμούς και αξιώματα, αποδεικνύουν θεωρήματα. Ακόμα και αν τα Δυναμικά Περιβάλλοντα Γεωμετρίας δεν μπορούν να αποδείξουν, εντούτοις προετοιμάζουν και λιπαίνουν το έδαφος και τον τρόπο, και ίσως εξάπτουν την περιέργεια που απαιτείται, ώστε να ενθαρρυνθούν οι μαθητές για να καταπιαστούν με το πρόβλημα (Aarnes & Knudtzon, 2003). Προκειμένου να δοθεί μια γεωμετρική απόδειξη, που μπορεί να κατανοηθεί από ένα μαθητή, είναι σημαντικό να ενισχυθεί αυτός, από ένα καλό σχήμα. Υπάρχουν πολλά καλά παραδείγματα λειψών και εσφαλμένων γεωμετρικών αποδείξεων, που βασίστηκαν σε λανθασμένα σχήματα. Μερικές φορές μια απόδειξη πρέπει να εξετάσει όλες τις πιθανές περιπτώσεις και επομένως απαιτούνται πολλά σχήματα για ένα απλό θεώρημα. Αυτή τη δυνατότητα, ασφαλώς, την παρέχει αφειδώς και άμεσα το Cabri Geometry, εισάγοντας και μυώντας, έτσι, τους μαθητές σε αποδεικτικούς μηχανισμούς (Accascina & Margiotta & Rogora, 2005).

- Επίπεδο 5: Αυστηρότητα (Rigor). Οι μαθητές, ως φοιτητές πια, με υψηλή μαθηματική σκέψη, μελετούν διάφορα αξιωματικά συστήματα, όπως τη γεωμετρία του Riemman ή την υπερβολική γεωμετρία του Lobachevsky

Αυτονοήτως, το τέταρτο επίπεδο συνάδει και προσιδιάζει περισσότερο στα αναλυτικά προγράμματα του Λυκείου, ενώ τα 3 πρώτα σε μαθητές της υποχρεωτικής Εκπαίδευσης. Έτσι και τα δυναμικά περιβάλλοντα Γεωμετρίας καλύπτουν και υποστηρίζουν, αναφανδόν, αυτά τα τρία πρώτα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης των van Hiele. Με τη δημιουργία κατάλληλων ακολουθιακών δραστηριοτήτων, που αφορούν σε κάθε ιεραρχικό επίπεδο, ενθαρρύνονται διαδικασίες διερεύνησης που ξεκινούν από την οπτικοποίηση (νοερή απεικόνιση), κατόπιν, «αναλύονται» και, τέλος, μέσω εικασιών και συσχετισμών (3ο επίπεδο) μπορούν να καταλήξουν σε, μαθηματικά αυστηρές αποδείξεις (4ο επίπεδο).

Συζήτηση -Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία διερευνήθηκε η προστιθέμενη αξία των ΤΠΕ στα Μαθηματικά, ως επιστημονικό πεδίο αλλά και στη διδασκαλία και τη μάθησή τους. Είναι διαχρονική και, μάλλον, επιβεβαιωμένη η συνεισφορά των ηλεκτρονικών υπολογιστών στην απόδειξη κάποιων θεωρημάτων (π.χ. των 4 χρωμάτων) και στην εύρεση «ειδικών» αριθμών (π, τέλειοι, φίλοι κλπ), γεγονός που δικαιώνει κατά πολύ τους λόγους της εφεύρεσής τους. Ακόμα είναι προδήλως καταλυτική και η συμβολή τους στη διδασκαλία και την κατανόηση των Μαθηματικών. Μέσω της εργασίας αυτής και με την αξιοποίηση των πολλών τρόπων κατασκευών, λειτουργιών και δραστηριοτήτων, που προσφέρει το λογισμικό Cabri Geometry μπορεί να αναδείχθηκε η μαθησιακή παρακαταθήκη των Δυναμικών Περιβαλλόντων Γεωμετρίας, στην μελέτη των τριών ή και του τέταρτου ακόμα, από τα πέντε επίπεδα γεωμετρικής σκέψης των van Hiele.

Εξαιτίας των παραπάνω, το «τρίλημμα» του τίτλου, ίσως, να προβάλει απλό, ευεξήγητο και ευεπίλυτο, αφού η ωφελιμότητα της τεχνολογίας μπορεί να καθιστά περιττή και ουτοπική κάθε αντίθετη επιχειρηματολόγηση.

Σε κάθε περίπτωση όμως, ο επιμορφωμένος εκπαιδευτικός με τη θετική στάση του, απέναντι στις ΤΠΕ, είναι η βασικότερη παράμετρος προσπορισμού εκπαιδευτικών και μαθησιακών ωφελειών και ωφελημάτων, μια όντως, αυταπόδεικτη πραγματικότητα, που, ουδόλως, θα πρέπει να παραλείπεται.

Βιβλιογραφικές παραπομπές:

Aarnes, J. & Knudtzon, S. (2003). Conjecture and Discovery in Geometry. A dialogue between exploring with dynamic geometric software (DGS) and mathematical reasoning. *PICME 2003*, Växjö, May 9th- 11th

Accascina, G. & Margiotta, G. & Rogora, E. (2005). Making bad conjectures and incomplete proofs with good drawings within a dynamic geometry environment. *ICTMT7*- Bristol, 26-29, July 2005

Alessi, S. & Trollip, S. (2001). *Πολυμέσα και Εκπαίδευση*. Αθήνα: Μ. Γκιούρδας

Bartolini Bussi, M. & Chiappini, G. & Reggiani, M. & Robutti, O. (2004). Learning Mathematics with tools. *In proceedings of IMCE-10*, Copenhagen

Βοσνιάδου, Σ. (2006). *Παιδιά Σχολεία και Υπολογιστές*. Αθήνα: Gutenberg

Cerussi, P. (2006). *Ιστορία της Υπολογιστικής Τεχνολογίας*. Αθήνα: Κάτοπτρο

Eves, H. (1989). *Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών- ως το 1650*. Αθήνα: Τροχαλία.

Eves, H. (1990). *Μεγάλες στιγμές των Μαθηματικών-μετά το 1650*. Αθήνα: Τροχαλία

Johnston- Wilder S. & Pimm D. (2005). *Teaching Secondary Mathematics with ICT*. Open University Press

Jonassen, D. & Howland, J. (2003). *Learning to Solve Problems with Technology. A Constructivist Perspective*. Pearon Education Inc, Upper Saddle River, New Jersey

Laborde, C. & kynigos, C. & Hollebrands, K. & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. *In Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. A. Gutiırrez, P. Boero (eds.), 275–304, Sense Publishers

Lovász, L. & Pelikán, J. & Vesztergombi, K. (2003). Discrete Mathematics Elementary and Beyond. *Springer*

Molnar, A. (1997). Computers in Education: A Brief History, *THE Journa*l, June 1997

Μπλάτνερ, Ν. (2001). *Η χαρά του π*. Αθήνα: Ωκεανίδα

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: VA: NCTM

Olkun, S. & Sinoplu, B. & Deryakulu, D. (2005). Geometric exploration with dynamic geometry applications base onVan Hiele levels. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning*

Περσίδης, Σ. (1978). *FORTRAN II, IV & V*. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση

Üstün, I. & Ubuz, B. (2004). Student’s Development of Geometrical Concepts Through a Dynamic Learning Environment. *The 10th International Congress on Mathematics Education*. Copenhagen, Denmark. July 4-11, 2004

Van de Walle, J. (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια Εξελικτική Διδασκαλία*. Αθήνα: Τυπωθήτω